至る所微分不可能な連続関数の構成的数学

根元多佳子

JAIST
手形 L^4 研究会

2018 年 3 月 27 日

目次

自己紹介

略歴

- 2004 年　東北大学理学部数学科卒業
- 2006 年　東北大学大学院理学研究科数学専攻前期修了
  (この間にオランダに行ったりもした)
- 2009 年　東北大学大学院理学研究科数学専攻後期修了
- 2009 年年度後半　JAIST
- 2010 年～2012 年　ベルン大学
- 2012 年～　JAIST

興味のあること

- 逆数学
- 構成的数学
- 古典論理上の数学も構成的数学も直観主義数学も,
  みんな違ってみんないい。
- ところでその間の関係はどうなってるのか。

1. 直観主義論理と構成的数学

普通の数学

古典論理に基づく

構成的数学

直観主義論理に基づく

証明と BHK 解釈

直観主義論理における命題と証明

- $A \wedge B$ の証明 (p, q) は A の証明 p と B の証明 q のペア;

証明と BHK 解釈

直観主義論理における命題と証明

- $A \wedge B$ の証明 (p, q) は A の証明 p と B の証明 q のペア;
- $A \vee B$ の証明 (i, p) は $i = 0$ または 1 と $i = 0$ ならば A の証明 p, $i = 1$ ならば B の証明 p という形のペア.

証明と BHK 解釈

直観主義論理における命題と証明

- $A \wedge B$ の証明 (p, q) は A の証明 p と B の証明 q のペア;
- $A \vee B$ の証明 (i, p) は $i = 0$ または 1 と $i = 0$ ならば A の証明 p, $i = 1$ ならば B の証明 p という形のペア.
- $A \to B$ の証明は, A のいかなる証明 p も B の証明 q へと変換する規則;

証明と BHK 解釈

直観主義論理における命題と証明

- $A \wedge B$ の証明 (p, q) は A の証明 p と B の証明 q のペア;
- $A \vee B$ の証明 (i, p) は $i = 0$ または 1 と $i = 0$ ならば A の証明 p, $i = 1$ ならば B の証明 p という形のペア.
- $A \to B$ の証明は, A のいかなる証明 p も B の証明 q へと変換する規則;
- $\neg A$ の証明は A のいかなる証明 p からも矛盾を導く規則;

証明と BHK 解釈

直観主義論理における命題と証明

- $A \wedge B$ の証明 (p, q) は A の証明 p と B の証明 q のペア;
- $A \vee B$ の証明 (i, p) は $i = 0$ または 1 と $i = 0$ ならば A の証明 p, $i = 1$ ならば B の証明 p という形のペア.
- $A \to B$ の証明は, A のいかなる証明 p も B の証明 q へと変換する規則;
- $\neg A$ の証明は A のいかなる証明 p からも矛盾を導く規則;
- $\forall x A(x)$ の証明は, x に対して $A(x)$ の証明を返す規則;

証明と BHK 解釈

直観主義論理における命題と証明

- $A \wedge B$ の証明 (p, q) は A の証明 p と B の証明 q のペア;
- $A \vee B$ の証明 (i, p) は $i = 0$ または 1 と $i = 0$ ならば A の証明 p, $i = 1$ ならば B の証明 p という形のペア.
- $A \to B$ の証明は, A のいかなる証明 p も B の証明 q へと変換する規則;
- $\neg A$ の証明は A のいかなる証明 p からも矛盾を導く規則;
- $\forall x A(x)$ の証明は, x に対して $A(x)$ の証明を返す規則;
- $\exists x A(x)$ の証明 (d, p) は, d と $A(d)$ の証明 p のペア;

証明と BHK 解釈

直観主義論理における命題と証明

- $A \land B$ の証明 (p, q) は A の証明 p と B の証明 q のペア;
- $A \lor B$ の証明 (i, p) は $i = 0$ または 1 と $i = 0$ ならば A の証明 p, $i = 1$ ならば B の証明 p という形のペア.
- $A \to B$ の証明は, A のいかなる証明 p も B の証明 q へと変換する規則;
- $\neg A$ の証明は A のいかなる証明 p からも矛盾を導く規則;
- $\forall x A(x)$ の証明は, x に対して $A(x)$ の証明を返す規則;
- $\exists x A(x)$ の証明 (d, p) は, d と $A(d)$ の証明 p のペア;

これは Brouwer-Heyting-Kolmogorov 解釈と呼ばれる.
現代的な構成的数学では, “規則” の部分を “アルゴリズム” と解釈することが多い.
更に下記を加えると, 古典論理の証明と同等になる:

- $\neg A$ が矛盾を導くことの証明も A の証明とする.

排中律の証明

A を未解決問題とする.

直観主義論理

- BHK 解釈によると, $A \vee \neg A$ の証明には
  A の証明または $\neg A$ の証明が与えられなければいけない.

排中律の証明

A を未解決問題とする.

直観主義論理

- BHK 解釈によると, $A \lor \neg A$ の証明には
  A の証明または $\neg A$ の証明が与えられなければいけない.
- しかし, 今のところどちらも与えられていないので, $A \lor \neg A$ の証明も与えられていない.

排中律の証明

A を未解決問題とする.

直観主義論理

- BHK 解釈によると, $A \vee \neg A$ の証明には
  A の証明または $\neg A$ の証明が与えられなければいけない.
- しかし, 今のところどちらも与えられていないので, $A \vee \neg A$ の証明も与えられていない.

古典論理

- $\neg(A \vee \neg A)$ とすると, $\neg A \wedge \neg\neg A$ となり矛盾.
- 排中律により $A \vee \neg A$ が証明される.

古典論理の形式化

Introduction rules

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 \\ A & B\end{matrix}}{A \wedge B}\ (\wedge I)$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D} \\ B\end{matrix}}{A \vee B}\ (\vee I_l) \qquad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D} \\ A\end{matrix}}{A \vee B}\ (\vee I_r)$$

$$\dfrac{\begin{matrix}[A] \\ \mathcal{D} \\ B\end{matrix}}{A \to B}\ (\to I)$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D} \\ A\end{matrix}}{\forall x A[x/y]}\ (\forall I)$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D} \\ A[x/t]\end{matrix}}{\exists x A}\ (\exists I)$$

Elimination rules

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D} \\ A \wedge B\end{matrix}}{A}\ (\wedge E_l) \qquad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D} \\ A \wedge B\end{matrix}}{B}\ (\wedge E_r)$$

$$\dfrac{\begin{matrix} & [A] & [B] \\ \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 & \mathcal{D}_3 \\ A \vee B & C & C\end{matrix}}{C}\ (\vee E)$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 \\ A \to B & A\end{matrix}}{B}\ (\to E)$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D} \\ \forall x A\end{matrix}}{A[x/t]}\ (\forall E)$$

$$\dfrac{\begin{matrix} & [A] \\ \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 \\ \exists y A[x/y] & B\end{matrix}}{B}\ (\exists E)$$

bottom rules

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D} \\ \bot\end{matrix}}{A}\ (\bot_i)$$

$$\dfrac{\begin{matrix}[\neg A] \\ \mathcal{D} \\ \bot\end{matrix}}{A}\ (\bot_c)$$

直観主義論理の形式化

Introduction rules

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2\\ A & B\end{array}}{A \wedge B}\ (\wedge I)$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ B\end{array}}{A \vee B}\ (\vee I_l) \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ A\end{array}}{A \vee B}\ (\vee I_r)$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \mathcal{D}\\ B\end{array}}{A \to B}\ (\to I)$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ A\end{array}}{\forall x A[x/y]}\ (\forall I)$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ A[x/t]\end{array}}{\exists x A}\ (\exists I)$$

Elimination rules

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ A \wedge B\end{array}}{A}\ (\wedge E_l) \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ A \wedge B\end{array}}{B}\ (\wedge E_r)$$

$$\dfrac{\begin{array}{ccc} & [A] & [B]\\ \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 & \mathcal{D}_3\\ A \vee B & C & C\end{array}}{C}\ (\vee E)$$

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2\\ A \to B & A\end{array}}{B}\ (\to E)$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \forall x A\end{array}}{A[x/t]}\ (\forall E)$$

$$\dfrac{\begin{array}{cc} & [A]\\ \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2\\ \exists y A[x/y] & B\end{array}}{B}\ (\exists E)$$

bottom rules

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \bot\end{array}}{A}\ (\bot_i)$$

$$\cancel{\dfrac{\begin{array}{c}[\neg A]\\ \mathcal{D}\\ \bot\end{array}}{A}\ (\bot_c)}$$

直観主義論理で証明できること・できないこと

証明できる

- $\neg\neg(A \vee \neg A)$
- $A \to \neg\neg A$
- $(B \to C) \to \neg\neg B \to \neg\neg C$

証明できない

- $A \vee \neg A$
- $\neg\neg A \to A$
- $(\neg\neg B \to \neg\neg C) \to B \to C$

Ex. Baire のカテゴリ定理

Baire のカテゴリ定理にはいくつかのバージョンがある

A. $\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$ が完備距離空間 X の稠密な開集合の列であるとき

$$U = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} U_n$$

もまた X で稠密である.

B. $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ が完備距離空間 X の内点を持たない閉集合の列であるとき

$$V = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} V_n$$

もまた内点を持たない.

このうち, A は構成的に証明できる (cf. [1]).

2. 実数とその上の関数

- 有理数列 $x = (p_n)_n$ が以下を満たすとき *regular* という:

$$\forall mn(|p_m - p_n| < 2^{-m} + 2^{-n})$$

- 有理数列 x が regular のとき x は実数 ($x \in \mathbf{R}$) という.
  $x = (p_n)_n$ に対して x_n は p_n を表す.
- 実数上の同値関係 $=_{\mathbf{R}}$ を以下で定める.

$$(p_n)_n =_{\mathbf{R}} (q_n)_n \overset{\text{def}}{\iff} \forall n(|p_n - q_n| \leq 2^{-n+2})$$

以下の関数は well-defined である.

$$(x \pm_{\mathbf{R}} y)_n = x_{2n+1} \pm y_{2n+1} \quad |x|_n = |x_n|$$

$$\max\{x, y\}_n = \max\{x_n, y_n\} \quad \min\{x, y\}_n = \min\{x_n, y_n\}$$

$$(x \cdot_{\mathbf{R}} y)_n = x_{2kn+1} \cdot y_{2kn+1}, \quad \text{where } k = \max\{|x|_0 + 2, |y|_0 + 2\}$$

実数上の順序 $<_{\mathbf{R}}$

x, y を実数とする.

順序 $<_{\mathbf{R}}$

- $\exists n(x_n > 2^{-n+2})$ のとき x を正の実数という.
- $\exists n(x_n < -2^{-n+2})$ のとき x を負の実数という.
- $y -_{\mathbf{R}} x$ が正のとき $x <_{\mathbf{R}} y$ とする.

$<_{\mathbf{R}}$ の性質

- $x =_{\mathbf{R}} x' \wedge y =_{\mathbf{R}} y' \wedge x <_{\mathbf{R}} y \to x' <_{\mathbf{R}} y'$
- $\forall x, y \in \mathbf{R} \forall n(x_n < y_n \vee x_n = y_n \vee y_n < x_n)$.
- しかし $\forall x, y \in \mathbf{R}(x <_{\mathbf{R}} y \vee x =_{\mathbf{R}} y \vee y <_{\mathbf{R}} x)$ は構成的に証明できない. (LPO)

実数上の順序 $\leq_{\mathbf{R}}$

x, y を実数とする.

順序 $\leq_{\mathbf{R}}$

- $y -_{\mathbf{R}} x$ が正でないとき, $x \leq_{\mathbf{R}} y$ とする.

$\leq_{\mathbf{R}}$ の性質

- $x =_{\mathbf{R}} x' \wedge y =_{\mathbf{R}} y' \wedge x \leq_{\mathbf{R}} y \to x' \leq_{\mathbf{R}} y'$
- $\forall x, y \in \mathbf{R}(x \leq_{\mathbf{R}} y \vee_{\mathbf{R}} y \leq_{\mathbf{R}} x)$ は
  構成的に証明できない. (LLPO)
- $\forall x, y \in \mathbf{R}(x \leq_{\mathbf{R}} y \vee_{\mathbf{R}} \neg x \leq_{\mathbf{R}} y)$ も
  構成的に証明できない. (WLPO)
- $\forall x, y \in \mathbf{R}(\neg x <_{\mathbf{R}} y \to y \leq_{\mathbf{R}} x)$ は構成的に証明できる.

以後, $=_{\mathbf{R}}$, $+_{\mathbf{R}}$, $-_{\mathbf{R}}$, $<_{\mathbf{R}}$, $\leq_{\mathbf{R}}$ などの $\mathbf{R}$ は省略する.

場合分けのテクニック

これまでで, 次が成り立たないことがわかった:

$$x <_{\mathbf{R}} y \vee x =_{\mathbf{R}} y \vee y <_{\mathbf{R}} x, \qquad x \leq_{\mathbf{R}} y \vee y \leq_{\mathbf{R}} x$$

“x が 0 以上のとき”, “そうでないとき” 的な場合分けは？

場合分けのテクニック

これまでで, 次が成り立たないことがわかった:

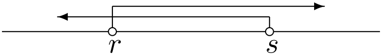
$$x <_{\mathbf{R}} y \vee x =_{\mathbf{R}} y \vee y <_{\mathbf{R}} x, \qquad x \leq_{\mathbf{R}} y \vee y \leq_{\mathbf{R}} x$$

“x が 0 以上のとき”, “そうでないとき” 的な場合分けは？

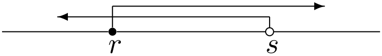
補題

実数 r, s が $r <_{\mathbf{R}} s$ のとき, 任意の実数 x に対して次がいえる:

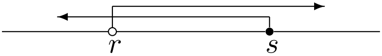
- $x <_{\mathbf{R}} s \vee r <_{\mathbf{R}} x$



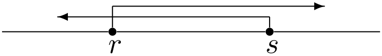
- $x <_{\mathbf{R}} s \vee r \leq_{\mathbf{R}} x$



- $x \leq_{\mathbf{R}} s \vee r <_{\mathbf{R}} x$



- $x \leq_{\mathbf{R}} s \vee r \leq_{\mathbf{R}} x$



以後, 実数 $a \leq_{\mathbf{R}} b$ に対して次の表記を使う:

$$(a, b) = \{x \in \mathbf{R} : a <_{\mathbf{R}} x <_{\mathbf{R}} b\} \quad [a, b] = \{x \in \mathbf{R} : a \leq_{\mathbf{R}} x \leq_{\mathbf{R}} b\}$$

3. 連続関数と微分可能性

- 一様連続関数 $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ は次を満たす $\varphi : \mathbf{Q} \times \mathbf{N} \to \mathbf{Q}$, $\nu : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ から成る.

$$(f(p))_n = \varphi(p,n) \in \mathbf{R}$$
$$\forall n \in \mathbf{N} \forall p,q \in \mathbf{Q}(|p-q| < 2^{-\nu(n)} \to |f(p)-f(q)| < 2^{-n}).$$

このとき $x \in [0,1]$ に対して, $f(x) \in \mathbf{R}$ は次で与えられる:

$$(f(x))_n = \varphi(\min\{\max\{x_{\mu(n)}, 0\}, 1\}, n+1),$$

但し $\mu(n) = \nu(n+1) + 1$.

微分係数と微分可能性

- $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ が x_0 で微分可能とは, ある $a \in \mathbf{R}$ に対して

$$\forall k \exists l \forall x \left(|x - x_0| < \frac{1}{2^l} \to \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a \right| \le \frac{1}{2^k} \right).$$

4. 完備距離空間と位相

- 集合 X と次の条件を満たす $\rho : X \times X \to \mathbf{R}_{\geq 0}$ のペアを距離空間という
  - $\rho(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$;
  - $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
  - $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.
- 距離空間 (X, ρ) に対して, X の点の列 $(x_n)_n$ が *regular* とは

$$\forall mn(\rho(x_m, x_n) < 2^{-m} + 2^{-n}).$$

- (X, ρ) の完備化 $(\hat{X}, \hat{\rho})$ は X の regular な列からなる.
  - $(x_n)_n =_{\hat{X}} (y_n)_n \overset{\text{def}}{\iff} \forall n(\rho(x_n, y_n) \leq 2^{-n+2})$.
  - $\hat{\rho}((x_n)_n, (y_n)_n) = (\rho(x_{2n+1}, y_{2n+1}))_n$.
- $(Y, \rho) = (\hat{Y}, \hat{\rho})$ なる距離空間 (Y, ρ) を完備距離空間という.

例

- $\mathbf{R}$, $\rho(x,y) = |x-y|$ とすると $(\mathbf{R}, \rho)$ は完備距離空間である.
- $C[0,1]$ を一様連続関数 $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ からなる集合とする. このとき $\rho(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\}$ とすると $(C[0,1], \rho)$ は完備距離空間である.
  - 一様性は $\sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\}$ の存在証明に必要.
  - 連続関数 $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ が一様連続であることを示すには, ある種の非構成的原理が必要 (FAN).

位相の概念

完備距離空間 (X,ρ) に対して以下が定義される.

開集合と閉集合

- 任意の $x \in U$ に対して, ある $\varepsilon > 0$ が存在して $\mathcal{B}(x,\varepsilon) = \{y \in X : \rho(x,y) < \varepsilon\} \subseteq U$ なる U を開集合という.
- 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $y \in \mathcal{B}(x,\varepsilon) \cap V$ が存在するような $x \in X$ はすでに V の元である $V \subseteq X$ を閉集合という.

稠密な集合と疎な集合

- $Y \subseteq X$ に対して, $\overline{Y} = \{x : \forall\varepsilon > 0 \exists y \in Y (y \in \mathcal{B}(x,\varepsilon))\}$ を Y の閉包という.
- $Y \subseteq X$ が $\overline{Y} = X$ となるとき稠密という.
- $Y \subseteq X$ に対して, $Y^\circ = \{x : \exists\varepsilon > 0 (\mathcal{B}(x,\varepsilon) \subseteq Y)\}$ を Y の内部という.
- $Y \subseteq X$ が $(\overline{Y})^\circ = \emptyset$ となるとき Y を疎という.

Baire のカテゴリ定理

Baire のカテゴリ定理にはいくつかのバージョンがある

A. $\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$ が完備距離空間 X の稠密な開集合の列であるとき

$$U = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} U_n$$

もまた X で稠密である.

B. $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ が完備距離空間 X の内点を持たない閉集合の列であるとき

$$V = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} V_n$$

もまた内点を持たない.

このうち, 1 は構成的に証明できる (cf. [1]).

5. Banach による古典的な定理

- $C[0,1]$ を $[0,1]$ から実数への連続関数の全体とすると,
- $||f|| = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$ は $C[0,1]$ 上のノルムで, $d(f,g) = ||f-g||$ は $C[0,1]$ 上の距離となる.

古典論理上の定理 (Banach)

$[0,1]$ 上で至る所微分不可能な連続関数 $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ は $C[0,1]$ 上稠密に存在する.

証明の概略

1. $\varphi_{m,n}(f)$ は以下とし, $U_{m,n} = \{f \in C[0,1] : \varphi_{m,n}(f)\}$ とする:
$$\forall x \exists y \in [0,1] \left(0 < |y - x| < \frac{1}{m} \wedge \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| > n \right).$$
微分可能な点 $x \in [0,1]$ を持つ $f \in C[0,1]$ は,
ある m, n に対して $f \notin U_{m,n}$ となる.
2. $U_{m,n}$ は開集合である.
   - $U_{m,n}$ が開集合でないとすると, ある $f \in U_{m,n}$ が存在して, 任意の $k \in \mathbf{N}$ に対して $g_k \notin U_{m,n}$ が存在し $||f - g_k|| < 2^{-k}$.
   - $\lim_{k \to \infty} g_k = f$ となる.
   - Bolzano-Weierstrass の定理より, 次を満たす x がとれる.
$$\forall y \in [0,1] \left(0 < |y - x| < \frac{1}{m} \to \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \leq n \right).$$
3. $U_{m,n}$ は稠密である.
   - 任意の $f \in C[0,1]$ と $\varepsilon > 0$ に対して $||f - p|| < \varepsilon$ なる piecewise-linear な $p \in C[0,1]$ がとれる.
4. Baire のカテゴリ定理 A より, $\bigcap_{m,n \in \mathbf{N}} U_{m,n}$ も稠密.

6. 構成的にやってみる

- $C[0,1]$ を $[0,1]$ から実数への一様連続関数の全体とする.
  - $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ が連続ならば一様連続であることの証明には非構成的原理が必要
- $||f|| = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$ は $C[0,1]$ 上のノルムで, $d(f,g) = ||f-g||$ は $C[0,1]$ 上の距離となる.
- 以下の $\varphi_{m,n}(f)$ で, $U_{m,n} = \{f \in C[0,1] : \varphi_{m,n}(f)\}$ としても, $U_{m,n}$ が開集合であることが示せない:

$$\forall x \exists y \in [0,1] \left(0 < |y-x| < \frac{1}{m} \wedge \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| > n\right).$$

  - 背理法が使えない
  - Bolzano-Weierstrass の定理が構成的には証明できない

構成的な再構築

- $\varphi'_{m,n}(f)$ を以下とし, $U_{m,n} = \left\{ f \in C[0,1] : \varphi'_{m,n}(f) \right\}$ とする.

$$\exists \varepsilon{>}0 \forall g \left(\begin{array}{l} ||f-g||{<}\varepsilon \rightarrow \\ \qquad \forall x{\in}[0,1] \neg\neg\exists t \in [0,1] \left(\begin{array}{c} 0 < |t-x| < \frac{1}{m} \\ \wedge \left| \frac{g(t)-g(x)}{t-x} \right| {>} n \end{array} \right) \end{array} \right).$$

- $U_{m,n}$ は開集合である.
  - $f \in U_{m,n}$ に対して条件を満たす $\varepsilon > 0$ をとると, $||f-h|| < \varepsilon$ なる h に対して $\varepsilon' = \varepsilon - ||f-h|| > 0$ がとれる.
- $U_{m,n}$ は稠密である.
  - 任意の $f \in C[0,1]$ と $\varepsilon > 0$ に対して $||f-g|| < \varepsilon$ かつ $\varphi'_{m,n}(g)$ なる $g \in C[0,1]$ を構成する.

構成的な再構築

- 関数 $p : [0,1] \to \mathbf{R}$ が *piecewise-linear* とは ある $[0,1]$ の分割 $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n+1} = 1$ が存在し p が各 $[a_i, a_{i+1}]$ で線形なことをいう.
- $PL[0,1]$ を piecewise-linear な $[0,1]$ 上の連続関数とする.

補題

$p \in PL[0,1]$ が, 微分可能な全ての x で $|p'(x)| > n$ なら $p \in U_{m,n}$.

証明

$0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{k+1} = 1$ で p は各 $[a_i, a_{i+1}]$ で線形とする.

$$s = \min\left\{\left|\frac{(p(a_{i+1}) - p(a_i))}{(a_{i+1} - a_i)}\right| - n : 0 \le i \le k\right\}$$

$$s' = \min(\{a_{i+1} - a_i : 0 \le i \le k\} \cup \{\frac{1}{m}\}), \qquad \varepsilon = s/16s'$$

とすると $g \in C[0,1]$, $||g - p|| < \varepsilon$ に対して以下を示す.

$$\forall x \in [0,1] \neg\neg\exists t \in [0,1] \left(0 < |t - x| < \frac{1}{m} \wedge \left(\left|\frac{g(t) - g(x)}{t - x}\right| > n\right)\right).$$

$||g-p||<\varepsilon$, $\delta_x=\min\{|x-a_i|:0\leq i\leq k+1\}$ とする.
任意の $x\in[0,1]$ に対して $\delta_x<s'/2\vee s'/4\leq\delta_x$ である.
Case 1. $\delta_x<s'/2$ のとき, $|x-a_i|<s'/2$ なる a_i をとる.
$a_i\leq x$, ならば, p は $[x,x+\frac{s'}{2}]$ で傾き b をもつ. $|b|>n$ より,
$b>n$ または $b<-n$ となる. $b>n$ ならば

$$\begin{aligned}\frac{g(x+\frac{s'}{2})-g(x)}{x+\frac{s'}{2}-x}\geq&\frac{2}{s'}\left(p(x+\frac{s'}{2})-\varepsilon-(p(x)+\varepsilon)\right)\\=&b-\frac{4}{s'}\varepsilon\geq s+n-\frac{s}{4}>n.\end{aligned}$$

$b<-n$, $x<a$ のときも同様に $\left|\frac{g(x-\frac{s'}{2})-g(x)}{x-\frac{s'}{2}-x}\right|>n$ が示せる. 従って

$$a_i{\leq}x\vee x{<}a_i\to\exists t{\in}[0,1]\left(0{<}|t-x|{<}\frac{1}{m}\wedge\left|\frac{g(t)-g(x)}{t-x}\right|{>}n\right),$$ さらに

$$\neg\neg(a_i{\leq}x\vee x{<}a_i)\to\neg\neg\exists t{\in}[0,1]\left(0{<}|t-x|{<}\frac{1}{m}\wedge\left|\frac{g(t)-g(x)}{t-x}\right|{>}n\right).$$

$\neg\neg(a_i{\leq}x\vee x{<}a_i)$ は証明できるので $\to$ の右側が成り立つ.

$||g-p|| < \varepsilon$, $\delta_x = \min\{|x-a_i| : 0 \leq i \leq k+1\}$ とする.
任意の $x \in [0,1]$ に対して $\delta_x < s'/2 \vee s'/4 \leq \delta_x$ である.
Case 2. $s'/4 \leq \delta_x$ のとき, p は $[x-\frac{s'}{4}, x+\frac{s'}{4}]$ で傾き b をもつ.
$|b| > n$ より, $b > n$ または $b < -n$. $b > n$ ならば

$$\begin{aligned}\frac{g(x+\frac{s'}{4})-g(x)}{x+\frac{s'}{4}-x} \geq& \frac{4}{s'}\left(p(x+\frac{s'}{4})-\varepsilon-(p(x)+\varepsilon)\right)\\ =&\frac{4}{s'}\left(\left(p(x+\frac{s'}{4})-p(x)\right)-2\varepsilon\right)\\ =&b-\frac{8}{s'}\varepsilon\\ \geq& s+n-\frac{s}{2} > n.\end{aligned}$$

$b < -n$ の場合も同様に $\frac{g(x+\frac{a}{4})-g(x)}{x+\frac{a}{4}-x} < -n$ が示せる.

構成的な再構築

補題 2

任意の $f \in C[0,1]$ と $\varepsilon > 0$ に対して $||f - p|| < \varepsilon$ かつ
微分可能な x で $|p'(x)| > n$ なる $p \in PL[0,1]$ が存在する.

証明

古典的な $U_{m,n}$ の稠密性の証明と同じ！

補題 1 と補題 2 より, $\tilde{U}_{m,n}$ の稠密性が示せた.

定理

$[0,1]$ で至る所微分不可能な連続関数は $C[0,1]$ で稠密に存在する.

証明

$\tilde{U}_{m,n}$ が $C[0,1]$ で稠密な開集合であることから,
Baire のカテゴリ定理 A より $\bigcap_{m,n\in\mathbf{N}} U_{m,n}$ もまた稠密.
ところで, $f \in C[m,n]$ がある点で微分可能ならば, ある m, n で
$f \notin \tilde{U}_{m,n}$ となるので, $\bigcap_{m,n\in\mathbf{N}} U_{m,n}$ の元は至る所微分不可能.

考察

- 古典的な証明で用いた

$$\forall x \exists y \in [0,1] \left(0 < |y-x| < \frac{1}{m} \wedge \left| \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \right| > n \right)$$
$$U_{m,n} = \{ f \in C[0,1] : \varphi_{m,n}(f) \}$$

に対して，$f \in U_{m,n}$ に対して $\mathcal{B}(f,\varepsilon) \subseteq U_{m,n}$ なる $\varepsilon > 0$ を計算する方法はあるか? 計算に必要な f の情報は?

- $f \in U_{m,n} \cap PL[0,1]$ に対してはある.
- 一般の $f \in U_{m,n}$ だと

$$\inf \left\{ \sup \left\{ \left| \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \right| - n : 0 < |y-x| < \frac{1}{m} \right\} : x \in [0,1] \right\}$$
$$\inf \left\{ \sup \left\{ |x-y| : 0 < |y-x| < \frac{1}{m} \wedge \left| \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \right| > n \right\} : x \in [0,1] \right\}$$

はどんな値になるのか?

参考文献

1. E. Bishop, *Foundations of Constructive Analysis*, Academic Press (1967).
2. D. Marker, *Most Continuous Functions are Nowhere Differentiable*, Lecture notes, `http://homepages.math.uic.edu/~marker/math414/fs.pdf` (2004).

Acknowledgment

The authors thank the Japan Society for the Promotion of Science (JSPS), Core-to-Core Program (A. Advanced Research Networks) for supporting the research.